

1.1.EPREUVE DE MATHEMATIQUES-SERIE C/SI (E)

REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

2015 – MATHEMATIQUES
Séries : C-E
Durée : 4 heures
Coef. : 5

L'usage de la calculatrice est autorisé. Le barème est susceptible de changer.

Exercice 1

5 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 1 cm, on considère les points M_0 , M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = -4 + i$, $z_1 = -2 - 3i$ et $z_2 = 1 - 4i$.

1. a. Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que :

$$S(M_0) = M_1 \text{ et } S(M_1) = M_2.$$

- b. Établir que l'écriture complexe de S est :

$$z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}.$$

- c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S .

- d. On considère un point M , d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image $M' = S(M)$ d'affixe z' .

Vérifier la relation $\omega - z' = -i(z - z')$. En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n , le point M_n a pour affixe z_n . Et le point M_{n+1} est défini par $M_{n+1} = S(M_n)$ et on pose $u_n = M_n M_{n+1}$.

- a. Placer les points M_0 , M_1 , M_2 et construire géométriquement les points M_3 , M_4 , M_5 et M_6 .

- b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. La suite (v_n) est définie sur \mathbb{N} par : $v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- a. Exprimer v_n en fonction de n .

- b. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

4. a. Calculer, en fonction de n , la longueur ΩM_n notée r_n .

- b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $r_n < 0,001$.

Exercice 2**5 points**

1. On considère l'équation (E) : $10x+11y+12z=95$ où x, y et z sont des entiers relatifs.
 - a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) vérifiant $10x+11y=1$; en déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).
 - b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
2. Soit (O, I, J, K) un repère orthonormé de l'espace.
On considère le plan (\mathcal{P}) d'équation : $10x+11y+12z=95$.
On considère les points du plan (\mathcal{P}) qui appartiennent aussi au plan (O, I, J) .
Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.
3. On considère un point M du plan (\mathcal{P}) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.
 - a. Montrer que l'entier y est impair.
 - b. On pose $y=2p+1$ où p est entier naturel.
Montrer qu'on a : $p+z \equiv 2 \pmod{5}$.
 - c. On pose $p+z=5q+2$ où q est entier naturel.
Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x+p+6q=6$.
En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.
 - d. En déduire les coordonnées de tous les points de (\mathcal{P}) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Problème**10 points**

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n , qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1+n \ln(x-1)}{(x-1)^2}.$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

- 1) Calculer $f_n'(x)$ et démontrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n \ln(x-1)$.
- 2) Résoudre l'inéquation $f_n'(x) \geq 0$. En déduire le signe de $f_n'(x)$.
- 3) Déterminer les limites de f_n en 1 et en $+\infty$.
- 4) a) Démontrer que pour tout n entier supérieur ou égal à 2 : $f_n \left(e^{\frac{n-2}{2n}} + 1 \right) = \frac{n}{2} e^{\frac{2-n}{2n}}$.
b) Établir le tableau de variation de f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n .

Partie B : Représentation graphique de quelques fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 5 cm). On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1) Construire (C_2) et (C_3) .

2) a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire que pour tout n entier supérieur ou égal à

$$2 : f_n(x) = n(f_3(x) - f_2(x)) + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3) .

Partie C : Calcul d'aires

1) Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x=2$ et $x=e+1$.

2) On note A_n l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et les droites d'équations $y=0$, $x=2$ et $x=e+1$.

a) Calculer A_2 .

b) Déterminer la nature de la suite A_n .

